التمرين الأول(04):

الفضاء منسوب الى متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;2;2)$، $B(1;0;1)$، $C(3;2;1)$ من الفضاء و المستوي (P) الذي معادلته $z=1$ والنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) و(Δ) هو المستقيم المعرف بتمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=-3+t \\ y=-4-t \\ z=1 \end{cases}$; $t\epsilon\mathbb{R}$

و(S) هو السطح الكروي المعرف بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=0$

من بين الاجوبة المقترحة ، اختر الجواب الصحيح مع التبرير:

	(ا)	(ب)	(ج)	(د)
1) تمثيل وسيطي لـ (B)هو	$\begin{cases} x=1+2k \\ y=2+k \\ z=-3k \end{cases}$; $k\epsilon\mathbb{R}$	$\begin{cases} x=-1+k \\ y=2+k \\ z=-3k \end{cases}$; $k\epsilon\mathbb{R}$	$\begin{cases} x=1-2k \\ y=2k \\ z=1 \end{cases}$; $k\epsilon\mathbb{R}$	$\begin{cases} x=1+2k \\ y=2k \\ z=3 \end{cases}$; $k\epsilon\mathbb{R}$
2) المستقيمان (Δ)و(BC)	متوازيات تماما	منطبقان	متقاطعان	ليسا من نفس المستوي
3)المستقيم (BC)	محتوى في المستوي (P)	يقطع المستوى (P)	لايوازي المستوي (P)	عمودي على المستوي (P)
4)احداثيات النقطة Dهي	$(1;2;-1)$	$(1;1;2)$	$(1;2;1)$	$(1;2;0)$
5)السطح الكروي (S):	يشمل النقطة A	يقطعه المستوى (P)	لايقطعه المستوى (P)	مركزه ينتمي الى المستوي (P)

التمرين الثاني(04):

لتكن (u_n)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n=\int_n^{n+1} e^{2-x}dx$

1. احسب u_0ثم اثبت مستعملا مبدا الاستدلال بالتراجع ، انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$
2. احسب u_n بدلالة n ، وبرهن ان المتتالية(u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول
3. ا) احسب بدلالة n الفرق$u_{n+1}-u_n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

   ب) استنتج ان المتتالية(u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$
4. نضع ، من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

   احسب بدلالة n المجموعS_n ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الثالث(05):

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس$(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقط A، B وC التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i$، $z_B=\sqrt{3}-i$، $z_C=4$

1. ا) اكتب الاعداد z_A،z_Bو$\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل المثلثي ، ثم استنتج الشكل الاسي

   ب) اكتب العدد المركب$\frac{z_A}{z_B}$ على شكله الجبري ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2. اوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{3}i\right)$، احسب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8$

3. ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}z$

   - حدد طبيعة التحويل النقطي S وعناصره المميزة

4. ا) اوجد المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق $z = z_C + 2e^{i\theta}$ لما θ تمسح $\mathbb{R}$

   ب) اوجد المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق : $Arg(z - z_C) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

5. اوجد صورة (Γ_1) بالتحويل النقطي S، استنتج مساحتها.

التمرين الرابع(07):

1) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 1cm$

ا) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بين ان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ وفسر النتيجة هندسيا

2) ا) اثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = (x^2 - 2x)e^{1-x}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

ج) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

3) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$

ا) ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x ، $h(x) \geq 0$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ المماس (T)

4) بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 < \alpha < 0$

5) انشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-1;+\infty[$

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $x^2e^{1-x} = -m$

7) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$

   - تحقق ان F دالة اصلية للدالة f
   - بين ان $\int_1^2 f(x)dx = -3 + 10e^{-1}$

السؤال	الجواب	التعليل	التنقيط
(1		الجملة $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2k \quad ; k\epsilon\mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم(BC) لان احداثياتB تحقق الجملة اي $k = 0$واحداثياتC تحقق ايضا الجملة اي$k = 1$	0.75
(2		المستقيمان و متقاطعان لان شعاعي التوجيه غير مرتبطين خطيا و $\begin{cases} -3 + t = 1 + 2k \\ -4 - t = 2k \\ 1 = 1 \end{cases}$ أي$\begin{cases} t = 0 \\ k = -2 \end{cases}$ و $M(-3; -4; 1)\epsilon(\Delta) \cap (BC)$	01
(3		المستقيمBC محتوى في ( )لان$B\epsilon(P)$، $1 = 1$و$C\epsilon(P)$ ، $1 = 1$	0.75
(4		احداثيات النقطةD هي$(1; 2; 1)$ لانها تحقق معادلة(P) اي $1 = 1$	0.75
(5		(P) يقطع سطح الكرة ( )لان$\omega(1; 2; 2)$ هي مركز (S)ونصف قطرها $R = 3$و $d(\omega; (P)) = 1$ و $d < R$	0.75

التنقيط	التصحيـــــح المفصل

التمرين 02 :

1) حسابu_0 ثم البرهان بالتراجع ان :$u_n > 0$

حساب u_0 :

$u_0 = \int_0^1 e^{2-x}dx = -[e^{2-x}]_0^1 = e^2 - e$ **0.25**

نضع $P(n) : u_n > 0$

المرحلة 01 : من اجل $n = 0$ نجد$u_0 = e^2 - e$ ومنه $u_0 > 0$

وعليه $P(0)$محققة

المرحلة 02 : من اجل عدد طبيعيn ،نفرض صحة $P(n)$ونبرهن صحة $P(n+1)$ **0.75**

لدينا : $u_{n+1} = \int_{n+1}^{n+2} e^{2-x}$ وبوضع $x = t + 1$ نجد

$t = x - 1$ ومنه نجد $u_{n+1} = \int_n^{n+1} e^{2-(t+1)}$

ومنه :$u_{n+1} = \int_n^{n+1} e^{2-t} \times e^{-1}dt$ وعليه نجد

$u_{n+1} = e^{-1} \underbrace{\int_n^{n+1} e^{2-t}dt}_{>0}$ ومنه نجد : $u_{n+1} > 0$ وعليه

$P(n+1)$ محققة . من اجل كل عدد طبيعيn ، $u_n > 0$

2) حساب u_n بدلالة n :

$u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}dx = -[e^{2-x}]_n^{n+1} = (e-1)e^{1-n}$ **0.25**

3) اثبات ان (u_n) متتالية هندسية :

من اجل كل عدد طبيعيn :

$u_{n+1} = (e-1)e^{1-(n+1)} = \frac{1}{e} \times u_n$ **0.5**

اذن (u_n)متتالية هندسية اساسها$q = \frac{1}{e}$ وحدها الاول

$u_0 = e^2 - e$ **0.25**

4) ا) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

من اجل كل عدد طبيعيn ، $u_n > 0$

$u_{n+1} - u_n = (e-1)e^{-n} - (e-1)e^{1-n}$

$(e-1)e^{-n}(1-e) = -(e-1)^2e^{-n}$ **0.5**

نلاحظ : $u_{n+1} - u_n < 0$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ب) استنتاج ان (u_n) متقاربة :

بما ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة **0.25**

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(e-1)e^{1-n} = 0$ **0.25**

5) حسابS_n :

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = e^2\left(1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right)$ **0.5**

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} e^2\left(1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right) = e^2$ **0.25**

التمرين 03 :

1. ا) كتابة z_A،z_Bو$\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل المثلثي واستنتاج الشكل الاسي

لدينا $arg(z_A) = \frac{\pi}{4}$، $|z_A| = \sqrt{2}$، $arg(z_B) = -\frac{\pi}{6}$،

$|z_B| = 2$

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = arg(z_A) -$ **0.75**

$arg(z_B) = \frac{5\pi}{12}$

العدد المركب	الشكل المثلثي	الشكل الاسي
z_A	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
z_B	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$	$2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
$\frac{z_A}{z_B}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

ب) كتابة العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري :

0.25 $$\frac{z_A}{z_B}=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}-i}{4}+i\frac{\sqrt{3}+i}{4}$$

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

لدينا مما سبق :

$\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{5\pi}{12}$ بمطابقة الشكل الجبري

0.5 والمثلثي للعدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ نجد: $\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

1. ايجاد قيمة العدد الطبيعي n:

0.25 $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1}{8}(1-\sqrt{3}i)$ تكافئ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^n=\frac{1}{4}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ اي

: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{5n\pi}{12}}=\frac{1}{4}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ومنه: $n=4$

0.5 $$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8=\left(\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^4\right)^2=\left(\frac{1}{8}(1-\sqrt{3}i)\right)^2$$

$$=\frac{1}{16}(-2-2\sqrt{3}i)=-\frac{1}{8}(1+\sqrt{3}i)$$

2. طبيعة التحويل النقطي S وعناصره المميزة:

التحويل النقطي S معادلته من الشكل $z'=az+b$

حيث $a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ و $b=0$

0.5 بما ان و فان S عبارة عن تشابه مباشر

نسبته : $k=|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته: $\theta=arg(a)=\frac{5\pi}{12}$ مركزه

النقطة O لان $b=0$

3. ا) تعيين المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي

تحقق $z=z_C+2e^{i\theta}$: لما θ تمسح $\mathbb{R}$:

0.5 $z=z_C+2e^{i\theta}$ تكافئ $z-z_C=2e^{i\theta}$

تكافئ $|z-z_C|=2$

تكافئ $CM=2$ ومنه (Γ_1) هي الدائرة ذات المركز C ونصف القطر 2

تعيين المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق

$arg(z-z_C)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

0.5 يكافئ $arg(z-z_C)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$(\vec{u};\vec{CM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

يكافئ M تنتمي الى نصف المستقيم الذي مبدؤه C والموجه بالشعاع $\vec{v}$ حيث: $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{4}$

4. ايجاد صورة المجموعة (Γ_1) بالتحويل S:

0.5 لدينا (Γ_1) هي الدائرة ذات المركز C ونصف القطر 2، بما ان

التحويل S تشابه مباشر فانه يحافظ على طبيعة الاشكال وعليه

صورة (Γ_1) بالتحويل S هي الدائرة ذات المركز C' ونصف $\sqrt{2}$

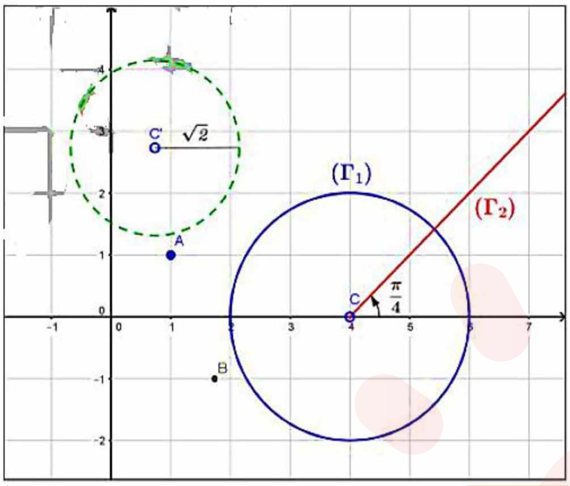
ج) الوضعية :

$f(x)-(-x+2)=xh(x)$

القطر r' حيث :

$\begin{cases}C'=S(C)\\ r'=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\end{cases}$ وبعد الحساب نجد: $\begin{cases}C'=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}\\ r'=\sqrt{2}\end{cases}$

0.25



التمرين 04 :

5) $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

0.25 ا) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2-x^2e^{1-x})=-\infty$

ب) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2-x^2e^{1-x})$

0.25 $\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{x^2}{e^x}e\right)=2$

0.25 فان المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

6) ا) f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

0.5 $f'(x)=e^{1-x}(-2x+x^2)$

ب) اشارة $f'(x)$ من اشارة $(-2x+x^2)$ وبالتالي جدول تغيرات

الدالة f كالتالي :

0.5

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$2-4e^{-1}$	↗	2

0.5 ج) معادلة المماس عند $x_0=1$ هي : $y=-x+2$

7) ا) الاشتقاق : $h'(x)=(x-1)e^{1-x}$

ب) اشارة $h'(x)$

0.5

x	$-\infty$		1		$+\infty$
اشارة $h'(x)$		$-$	0	$+$	

اتجاه التغير : الدالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

اشارة $h(x)$:

0.5

x	$-\infty$		1		$+\infty$
اشارة $h(x)$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$		$+$	0	$+$	
اشارة الفرق		$-$	0	$+$	0	$+$	

0.5

الوضع النسبي : (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]-\infty;0]$

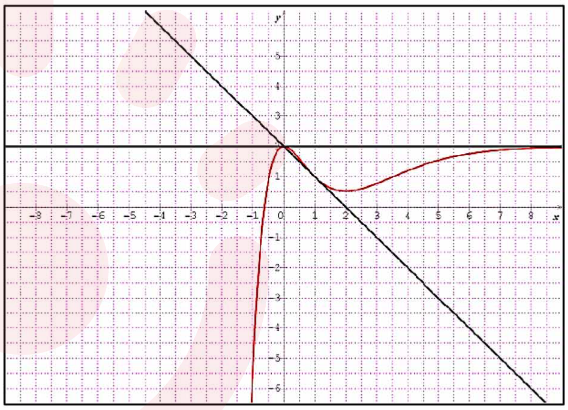
(C_f) يقع فوق (T) على المجالين $]0;1[$ و $]1;+\infty[$

(C_f) و (T) يتقاطعان عند النقطتين ذات الفاصلتين

$x=0$ و $x=1$

1) نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $]-1;0[$ 0.5

2) الانشاء :



0.75

3) المناقشة :

لدينا : $x^2e^{1-x}=-m$ ومنه : $2-x^2e^{1-x}=m+2$

$2-x^2e^{1-x}=m+2$ ومنه $f(x)=m+2=M$

(مناقشة افقية)

اذا كان :

- $M<2-4e^{-1}$ اي $m<-4e^{-1}$ فالمعادلة تقبل حلا وحيدا 0.75
- $M=2-4e^{-1}$ اي $m=-4e^{-1}$. فالمعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف
- $2-4e^{-1}<M<2$ اي $-4e^{-1}<M<0$. فالمعادلة تقبل ثلاث حلول
- $M=2$ اي $m=0$ فالمعادلة تقبل حلا وحيدا مضاعفا
- $M>2$ اي $m>0$ فالمعادلة لاتقبل حلول

4) ا) نتحقق ان : $F'(x)=f(x)$ 0.5

ب) $\int_1^2 f(x)dx=F(2)-F(1)$

ومنه $\int_1^2 f(x)dx=-3+10e^{-1}$ 0.5